முழுப் பதிப்புரிமையுடையது

அந்தரங்கமானது

இலங்கை பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த. (உயர் தர)ப் பரீட்சை – 2024

10 - இணைந்த கணிதம் I

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக் கொள்ளப்படும் கருத்துக்களுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன.

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2024

10 - இணைந்த கணிதம்

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பத்திரம் I

பகுதி A	=	10 x 25	=	250
பகுதி B	=	05 x 150	=	750

மொத்தம் $= \frac{1000}{10}$

இறுதிப் புள்ளி = 100

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது **தெளிவான இலக்கத்தில்** எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் □ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ $\frac{4}{5}$

....

....

(ii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

....

....

(iii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

....

....

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும்.

o o o

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $7^n - 1$ ஆனது 6 இனால் வகுபடுகின்றதென நிறுவுக.

$n = 1$ இற்கு, $7^n - 1 = 7 - 1 = 6$, அத்துடன் இது 6 ஆல் வகுபடும். (5)

$\therefore n = 1$ இற்கு பேறு உண்மையானது

k யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறைவெண் என்க. $n = k$ இற்கு பேறு உண்மையானது எனக் கொள்வோம்.
i.e. $7^k - 1$ ஆனது 6 ஆல் வகுபடும். (5)

$\therefore \quad 7k - 1 = 6p$ ஆகுமாறு $p \in \mathbb{Z}^+$ உண்டு (5)

$7k + 1 - 1 = 7.7k - 1$

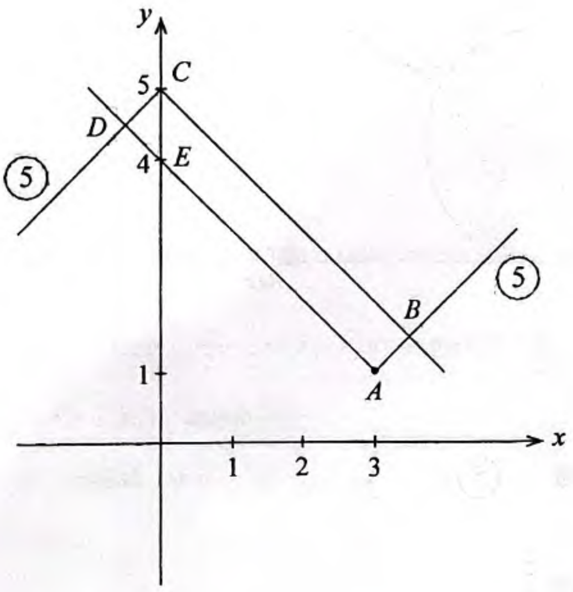
$= 7(6p + 1) - 1$

$= 42p + 6$

$= 6(7p + 1)$, அத்துடன் இது 6 ஆல் வகுபடும் (5)

ஆகவே $n = k$ இற்கு பேறு உண்மையானது எனின் $n = k + 1$ இற்கும் பேறு உண்மையானது ஆகும். $n = 1$ இற்கு பேறு உண்மையானது என்று ஏற்கனவே நிறுவப்பட்டுள்ளது. எனவே கணிதத்தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டின்படி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் பேறு உண்மையானது ஆகும். (5)

2. $y = |x-3| + 1$, $y = 5 - |x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்திற் பருமட்டாக வரைக. இதிலிருந்து, இவ்வரைபுகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் செவ்வகப் பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.



$CD = 1\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (5)

$AD = DE + EA = 1\sin 45° + \sqrt{3^2 + 3^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}$ (5)

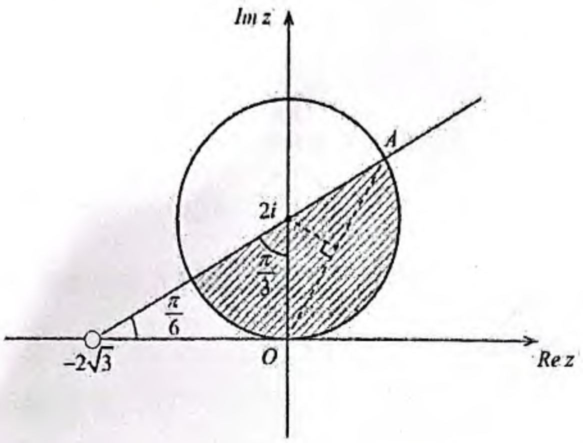
$= \frac{7}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ தேவையான பரப்பளவு $= CD \cdot AD$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}}$

$= \frac{7}{2}$ அலகுகள். (5)

3. $|z-2i| \leq 2$, $0 < \text{Arg}\left(z+2\sqrt{3}\right) < \frac{\pi}{6}$ என்னும் சமனிலிகளைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசத்தை ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் நிழற்றுக.
இந்நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்தில் உள்ள புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்கள் z இற்கு $|z|$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் காண்க.



$-2\sqrt{3}$ இல் துளையுடன் அரைக் கோடு (5)

O இல் $x-$ அச்சைத் தொடும் வட்டம் (5)

சரியான பிரதேசத்தை நிழற்றுவதற்கு (5)

தேவையான $|z|$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானம் $= OA$ (5)

$$= 2 \times 2 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$ (5)

4. $(1+x^3)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ இன் விரியில் உள்ள மாறா உறுப்பு 93 எனக் காட்டுக.

$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ இன் ஈருறுப்பு விரிவில் பொது உறுப்பு $= {}^9C_r x^r\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{9-r}$ (5)

$= {}^9C_r x^r \cdot x^{\left(\frac{r}{2}-\frac{9}{2}\right)}$

$= {}^9C_r x^{\left(\frac{3r}{2}-\frac{9}{2}\right)}$ (5)

$(1+x^3)\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ இன் விரிவில் மாறிலி பதம் பெறப்படுவதற்கு

$\frac{3r}{2}-\frac{9}{2}=0$ உம் $\frac{3r}{2}-\frac{9}{2}=-3$. உம் ஆகும் (5)

i.e. $r=3$ உம் $r=1$ உம் ஆகும்

$\therefore$ தேவையான மாறிலி பதம் $= {}^9C_1 + {}^9C_3$ (5)

$= \frac{9!}{8!}+\frac{9!}{3!6!}$

$= 9+\frac{9\times 8\times 7}{2\times 3}$

$= 9 + 84$

$= 93.$ (5)

5. $\lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{(x-4)^2} \sin\left(\sqrt{x}-2\right) = \frac{1}{8}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{(x-4)^2} \sin\left(\sqrt{x}-2\right)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)}{(x-4)^2} \cdot \frac{\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{\left(\sqrt{x-3}+1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{x}-2\right) \quad (5)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)^2\left(\sqrt{x-3}+1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{x}-2\right)$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)} \cdot \frac{\sin\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{4}+2\right)\left(\sqrt{1}+1\right)} \cdot 1 \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{1}{8}. \quad (5)$$

6. $y=\dfrac{2}{x\sqrt[4]{4-x^2}}$, $y=0$, $x=1$, $x=\sqrt{2}$ என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x-அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\pi\left(\sqrt{3}-1\right)$ எனக் காட்டுக.

தேவையான கனவளவு $= \pi\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} y^2\,dx$ ⑤

$$= \pi\int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$x = 2\sin t$ எனின் $dx = 2\cos t\,dt$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,dt$$ ⑤

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 t\cdot 2\cos t}\cdot 2\cos t\,dt$$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec}^2 t\,dt$$ ⑤

$$= \pi(-\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$ ⑤

$$= \pi\left(-\cot\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \pi\left(\sqrt{3}-1\right).$$ ⑤

7. C என்பது $t > 0$ இற்கு $x = \ln t$, $y = e^t + t\ln t$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படும் வளையியெனக் கொள்வோம். $\frac{dy}{dx} = t(e^t + \ln t + 1)$ எனக் காட்டுக.
வளையி C இற்கு $t = 1$ ஐ நேரொத்த புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடலி புள்ளி $(1, a)$ இனூடாகச் செல்லுமெனின், $a = 1 + 2e$ எனக் காட்டுக.

$x = \ln t$, $y = e^t + t\ln t$ $t > 0$. இற்கு

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt} = e^t + \ln t + t \cdot \frac{1}{t}$ (5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t + \ln t + 1)}{\frac{1}{t}}$$

$= t(e^t + \ln t + 1)$. (5)

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = e + \ln 1 + 1 = e + 1$. (5)

$t = 1$ இற்கு தொடர்பான புள்ளி $(0, e)$. (5)

$\therefore \quad \frac{a - e}{1 - 0} = e + 1$

$\therefore a = 1 + 2e$. (5)

8. உற்பத்தியிலிருந்து செங்குத்துத் தூரம் 1 இல் இருப்பனவும் புள்ளி $A \equiv (-1, 2)$ இனூடாகச் செல்வனவுமான இரு நேர்கோடுகளினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$A \equiv (-1, 2)$ இனூடாக செல்லும் எந்தவொரு நேர்கோட்டினதும் சமன்பாடு $a(x+1) + b(y-2) = 0$ எனும் வடிவில் இருக்கும், இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$ அத்துடன் $a^2 + b^2 \neq 0$. (5)

$\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$ என தரப்பட்டுள்ளது. (5)

$\Leftrightarrow \quad (a-2b)^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow \quad 4ab - 3b^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad b(4a-3b) = 0$

$\Leftrightarrow \quad b = 0$ அல்லது $a = \frac{3b}{4}$ (5)

4

தேவையான சமன்பாடுகள் $a(x+1) = 0$ அல்லது $\frac{3b}{4}(x+1) + b(y-2) = 0.$

ஆகவே, $x = -1$ (5) அல்லது $3x + 4y - 5 = 0.$ (5)

வேறுமுறை

$x = -1$ ஆனது $A \equiv (-1, 2)$ இனூடாக செல்லும் ஒரு நேர்கோடாகும். (5)

$y = mx + c$ என்பது $A \equiv (-1, 2)$ இனூடாக செல்லும் வேறொரு நேர்கோடு என்க.

எனவே $2 = m(-1) + c$ இதிலிருந்து $c = m + 2.$ (5)

$\therefore \ y = mx + m + 2.$

$\dfrac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$ என தரப்பட்டுள்ளது (5)

$\Leftrightarrow \quad (m+2)^2 = m^2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad 4m + 4 = 1$

$\Leftrightarrow \quad m = -\frac{3}{4}.$ (5)

மற்றைய நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 2.$

i.e. $3x + 4y - 5 = 0.$ (5)

9. $A \equiv (-1, 1)$ எனவும் $B \equiv (3, 3)$ எனவும் கொள்வோம். AB ஐ ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S இன் சமன்பாட்டினை எழுதுக.
வட்டம் $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ ஆனது வட்டம் S ஐ B இல் உள்ளே தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

S இன் சமன்பாடு

$$(x+1)(x-3) + (y-1)(y-3) = 0. \quad (5)$$

S இன் மையம் C_1 என்க

எனின் $C_1 \equiv (1, 2)$.
அதன் ஆரை $r_1 = \sqrt{5}$ (5)

$x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ இன் மையம் C_2 என்க
எனின்

$$C_2 \equiv \left(2, \frac{5}{2}\right).$$

ஆரை $r_2 = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 9} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$ (5)

இப்போது , $C_1C_2 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

$\therefore\ C_1C_2 = r_1 - r_2.$ (5)

B இரண்டாவது வட்டத்தில் இருக்கும் என்பதை சரிபார்க்க (5)

$\therefore\ x^2 + y^2 - 4x - 5y + 9 = 0$ எனும் வட்டம் S ஐ உட்புறமாக B இல் தொடும்.

10. $\dfrac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\sin\theta}=4\operatorname{cosec}2\theta$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\dfrac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\sin\theta}=8\cos 2\theta$ ஐத் தீர்க்க.

$$\frac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\sin\theta}$$

$$=\frac{[(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)]\cot\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2\cot\theta}{\cos^2\theta} \quad (5)$$

$$=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=4\operatorname{cosec}2\theta. \quad (5)$$

$$\frac{\cot\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\sin\theta}=8\cos 2\theta$$

$$4\operatorname{cosec}2\theta=8\cos 2\theta \quad (5)$$

$$2\cos 2\theta\sin 2\theta=1$$

$$\sin 4\theta=1 \quad (5)$$

$$\sin 4\theta=\sin\frac{\pi}{2}$$

$\therefore 4\theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{2}$, இங்கு $n\in\mathbb{Z}$.

$\therefore \theta=\dfrac{n\pi}{4}+(-1)^n\dfrac{\pi}{8}$, இங்கு $n\in\mathbb{Z}$. (5)

11. (a) $f(x) = x^2 + 2x + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $c \in \mathbb{R}$.

சமன்பாடு $f(x) = 0$ இற்கு இரு மெய் வேறுவேறான மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $c < 1$ எனக் காட்டுக.

α, β ஆகியன $f(x) = 0$ இன் மூலங்களெனக் கொள்வோம்.

$\alpha^2 + \beta^2 = 4 - 2c$ எனக் காட்டுக.

$c \neq 0$ எனவும் $\lambda \in \mathbb{R}$ எனவும் கொள்வோம். $\alpha + \frac{1}{\alpha}$, $\beta + \frac{1}{\beta}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $2x^2 + 12x + \lambda = 0$ ஆகும். c, λ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $f(x) = x^3 + px^2 + qx + p$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $p, q \in \mathbb{R}$ ஆகும். $f(x)$ ஆனது $(x-2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது உள்ள மீதி, $f(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது உள்ள மீதியிலும் பார்க்க 36 இனாற் கூடியது. $3p + q = 29$ எனக் காட்டுக.

$(x+1)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.

$p = 6$ எனவும் $q = 11$ எனவும் காட்டி, $f(x)$ ஐ முழுமையாகக் காரணிப்படுத்துக.

இதிலிருந்து, $f(x) = 3(x+2)$ ஐத் தீர்க்க.

(5) (5)

(a) $\Delta = 4 - 4c > 0$.

$\therefore\ c < 1.$ (5) **15**

$\alpha + \beta = -2$ அத்துடன் $\alpha\beta = c$.

(5) (5)

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ (5)

$= 4 - 2c.$ (5) **20**

$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{12}{2}$ (10)

$\alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -6$ (5)

$-2 - \frac{2}{c} = -6$ (5)

$\frac{2}{c} = 4$

$c = \frac{1}{2}$ (5)

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\lambda}{2} \quad (10)$$

$$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\lambda}{2}$$

$$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

$$c+\frac{1}{c}+\frac{4-2c}{c}=\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{1}{2}+2+\frac{4-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

$$\frac{5}{2}+6=\frac{\lambda}{2}$$

$\therefore\ \lambda = 17.$ (5) **[50]**

(b) $f(x) = x^3 + px^2 + qx + p$

$f(x)$ ஆனது $(x-2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி

$= f(2) = 8 + 4p + 2q + p = 8 + 5p + 2q.$ (5)

$f(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி

$= f(1) = 1 + p + q + p = 1 + 2p + q.$ (5)

$f(2) = 36 + f(1)$ என தரப்பட்டுள்ளது (5)

$8 + 5p + 2q = 36 + 1 + 2p + q.$

$3p + q = 29$ ——— ①

(5) **[20]**

$(x+1)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி என்பதால் $f(-1) = 0.$ (5)

$\therefore\ -1 + p - q + p = 0$

$\therefore\ 2p - q = 1$ ——— ② (5)

① , ② $\Rightarrow$ $5p = 30$

$\therefore p = 6$ (5)

① $\Rightarrow$ $18 + q = 29$

$\therefore q = 11.$ (5)

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$= (x+1)(x^2+5x+6)$ (5)

$= (x+1)(x+2)(x+3)$ (5)

30

$f(x) = 3(x+2)$

$(x+1)(x+2)(x+3) = 3(x+2)$

$(x+2)[(x+1)(x+3)-3] = 0$ (5)

$(x+2)(x^2+4x) = 0$

$x(x+2)(x+4) = 0$ (5)

$\therefore\ x = 0$ or $x = -2$ or $x = -4.$ (5)

15

---

12. (*a*) ஒரு குடும்பத்தின் பெற்றோர் தமது கிட்டிய 15 உறவினர்களில் 6 உறவினர்களை இராப்போசனத்திற்கு அழைப்பதற்குத் தீர்மானித்துள்ளனர். தந்தைக்குக் கிட்டிய 5 பெண் உறவினர்களும் கிட்டிய 3 ஆண் உறவினர்களும் இருப்பதோடு தாய்க்குக் கிட்டிய 3 பெண் உறவினர்களும் கிட்டிய 4 ஆண் உறவினர்களும் உள்ளனர்.

(i) தந்தை தனது கிட்டிய பெண் உறவினர்களில் 3 பெண் உறவினர்களையும் தாய் தனது கிட்டிய ஆண் உறவினர்களில் 3 ஆண் உறவினர்களையும் அழைக்கத்தக்க,

(ii) 3 ஆண்களும் 3 பெண்களும் அழைக்கப்படுமாறு தந்தை தனது கிட்டிய உறவினர்களில் 3 உறவினர்களையும் தாய் தனது கிட்டிய உறவினர்களில் 3 உறவினர்களையும் அழைக்கத்தக்க

வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{1}{r(r+2)(r+4)}$ எனவும் $f(r) = \dfrac{1}{r(r+2)}$ எனவும் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $f(r) - f(r+2) = AU_r$ ஆக இருக்குமாறு மெய்ம் மாறிலி A இன் பெறுமானத்தைத் துணிக.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{11}{96} - \frac{1}{4(n+1)(n+3)} - \frac{1}{4(n+2)(n+4)}$ எனக் காட்டுக.

மேலும், முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} (mU_r + U_{n+1-r}) = \frac{11}{32}$ ஆக இருக்குமாறு மெய்ம் மாறிலி m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*a*)

தந்தை		தாய்	
பெண்வழி உறவினர்	ஆண்வழி உறவினர்	பெண்வழி உறவினர்	ஆண்வழி உறவினர்
5	3	3	4

(i) 3 நெருங்கிய பெண்சொந்தங்களை தந்தை அழைக்கக்கூடிய வெவ்வேறான வழிகள் $= {}^5C_3$ (5)

3 நெருங்கிய ஆண்சொந்தங்களை தாய் அழைக்கக்கூடிய வெவ்வேறான வழிகள் $= {}^4C_3$ (5)

$\therefore$ தந்தை 3 நெருங்கிய பெண்சொந்தங்களையும் தாய் 3 நெருங்கிய ஆண்சொந்தங்களையும் அழைக்கக்கூடிய வெவ்வேறான வழிகள் $= {}^5C_3 \times {}^4C_3$ (5)

$= \dfrac{5!}{3!2!} \times \dfrac{4!}{3!1!} = \dfrac{5 \times \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} \times 4 = 40.$ (5)

20

(ii)

	தந்தை	தாய்	வெவ்வேறான வழிகள்	
(10)	3 பெண்கள்	3 ஆண்கள்	$^5C_3 \times {}^4C_3 = 40$	
	2 பெண்கள், 1 ஆண்	1 பெண், 2 ஆண்கள்	$^5C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4C_2 = 540$	(10)
	1 பெண், 2 ஆண்கள்	2 பெண்கள், 1 ஆண்	$^5C_1 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_1 = 180$	(10)
	3 ஆண்கள்	3 பெண்கள்	$^3C_3 \times {}^3C_3 = 1$	(5)

விடை = 40 + 540 + 180 + 1 = 761. (5)

40

(b) $f(r) - f(r+2) = \dfrac{1}{r(r+2)} - \dfrac{1}{(r+2)(r+4)}$ (5)

$= \dfrac{(r+4) - r}{r(r+2)(r+4)}$ (5)

$= 4 \cdot \dfrac{1}{r(r+2)(r+4)}$

$= 4U_r$ (5)

$\therefore A = 4.$ (5)

20

$\therefore \quad 4U_r = f(r) - f(r+2), \; r \in \mathbb{Z}^+.$

$r = 1 \quad : \quad 4U_1 = f(1) - f(3)$

$r = 2 \quad : \quad 4U_2 = f(2) - f(4)$ (5)

$r = 3 \quad : \quad 4U_3 = f(3) - f(5)$

. . . .

. . . .

. . . .

$r = n-2 \quad : \quad 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$r = n-1 \quad : \quad 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$ (5)

$r = n \quad : \quad 4U_n = f(n) - f(n+2)$

$4\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$ (10)

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{(n+1)(n+3)} - \dfrac{1}{(n+2)(n+4)}$ (10)

$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{11}{96} - \dfrac{1}{4(n+1)(n+3)} - \dfrac{1}{4(n+2)(n+4)}$ (5)

35

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{11}{96}-\frac{1}{4(n+1)(n+3)}-\frac{1}{4(n+2)(n+4)}\right\} \quad (5)$$

$$=\frac{11}{96}. \quad (5)$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்கும் அத்துடன் கூட்டுத்தொகை $=\frac{11}{96}$ (5)

[15]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(mU_r+U_{n+1-r}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(m\sum_{r=1}^{n}U_r+\sum_{r=1}^{n}U_{n+1-r}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(m\sum_{r=1}^{n}U_r+\sum_{r=1}^{n}U_r\right) \quad (10)$$

$$=(m+1)\sum_{r=1}^{\infty}U_r$$

$$\therefore (m+1)\frac{11}{96}=\frac{11}{32} \quad (5)$$

$$\therefore m+1=3,\ m=2. \quad (5)$$

[20]

---

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$ எனவும் $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 3 & b & a \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

$2A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$a = 0$ எனவும் $b = 5$ எனவும் காட்டுக.

a, b ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு, $C = AB^T$ எனக் கொள்வோம்.

C ஐக் கண்டு C^{-1} ஐ எழுதுக.

$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ஆகுமாறு தாயம் D ஐக் காண்க.

(b) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(iii) $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$

எனக் காட்டுக.

$z_2 \neq 0$ இற்குப் பேறு $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ஐப் பயன்படுத்தி, $|z_1| = 1$ ஆகவும் $z_1 \neq \pm 1$ ஆகவும் $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ மெய்யாகவும் இருப்பின், $|z_2| = 1$ எனக் காட்டுக.

(c) $\sqrt{3} + i$ ஐ வடிவம் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $\frac{(\sqrt{3}+i)^{24}}{2^{23}(1+i)} = 1 - i$ எனக் காட்டுக.

(a) $2A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 3 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(10) $$\begin{pmatrix} 2 & 4+a & -2+b \\ 6+3 & 2a+b & 4+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow 4 + a = 4\ ,\ -2 + b = 3\ ,\quad 2a + b = 5$ (10) ஏதாவது இரண்டிற்கு

$\Leftrightarrow a = 0\ ,\ b = 5.$ (5)

$\mathbf{C} = \mathbf{AB^T}$ ⑤

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$ ⑩

$$\mathbf{C^{-1}} = -\frac{1}{175}\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}.$$ ⑩

[25]

$$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{C^{-1}}$$ ⑤

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\left[-\frac{1}{175}\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{175}\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}.$$ ⑩

[15]

(a) $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ என்க, இங்கு $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$

$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$ ⑤

$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$

$= \overline{z}_1 + \overline{z}_2.$ ⑤

[10]

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2)}$

$= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)}$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$ (5)

$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$ (5)

$\therefore \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2.$ (5)

15

(iii) $z_1\overline{z}_1 = (x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)$

$= x_1^2 + y_1^2$ (5)

$= |z_1|^2.$ (5)

10

$\overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}\right)} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}$ (5)

$\Rightarrow \frac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{1 + \overline{z}_1\overline{z}_2} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}$ (5)

$\Rightarrow \overline{z}_1 + \overline{z}_1z_1z_2 + \overline{z}_2 + \overline{z}_2z_1z_2 = z_1 + z_2 + \overline{z}_1\overline{z}_2z_1 + \overline{z}_1\overline{z}_2z_2$;

$\Rightarrow \overline{z}_1 + |\overline{z}_1|^2 z_2 + \overline{z}_2 + z_1|\overline{z}_2|^2 = z_1 + z_2 + \overline{z}_2|\overline{z}_1|^2 + \overline{z}_1|\overline{z}_2|^2$ (5)

$\Rightarrow \overline{z}_1 + \not{z_2} + \not{\overline{z}_2} + z_1|z_2|^2 = z_1 + \not{z_2} + \not{\overline{z}_2} + \overline{z}_1|z_2|^2$;

$\Rightarrow (z_1 - \overline{z}_1)\left(|\overline{z}_2|^2 - 1\right) = 0$ (5)

$\Rightarrow |z_2|^2 - 1 = 0 \quad (\because \overline{z}_1 \neq z_1)$

$\Rightarrow |z_2| = 1.$ (5)

$\left(|z_1| = 1 \text{ and } z_1 \neq \pm 1\right)$

(c) $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$ (5)

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (5)

$r=2$ and $\theta=\frac{\pi}{6}$.

$\frac{(\sqrt{3}+i)^{24}}{2^{23}(1+i)}=\frac{2^{24}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)}{2^{23}(1+i)}$ (5)

$=\frac{2}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$ (5)

$=\frac{2(1-i)}{2}$

$=1-i.$ (5)

25

---

14. (*a*) $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ இற்கு $f(x) = \dfrac{px+q}{(x-1)(x-2)}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $p, q \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

$y = f(x)$ இன் வரையில் $(0, 1)$ இல் ஒரு நிலையான புள்ளி இருக்கின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $p = -3$ எனவும் $q = 2$ எனவும் காட்டுக.

p, q ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq 1, 2$ இற்கு $f'(x) = \dfrac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டி, $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

அணுகுகோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டி, $y = f(x)$ இன் வரையைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து, சமன்பாடு $x^2(x-1)(x-2) = 2 - 3x$ இன் மெய்த் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(*b*) ஒரு மூடியும் ஓர் அடியும் உள்ள ஓர் உருளை $1024\pi \text{ cm}^3$ கனவளவைக் கொண்டிருக்குமாறு செய்யப்பட்டுள்ளது. உருளையின் ஆரை r cm எனக் கொள்வோம். உருளையின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $S \text{ cm}^2$ ஆனது $r > 0$ இற்கு $S = 2\pi\left(\dfrac{1024}{r} + r^2\right)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$r = 8$ ஆக இருக்கும்போது S குறைந்தபட்சமாகுமெனக் காட்டுக.

(a) $f(0) = 1$, ஆதலால் $\dfrac{q}{2} = 1$.

$\therefore\ q = 2$ (5)

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)p - (px+q)(x-1+x-2)}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad (10) \quad x \neq 1, 2, \text{ இற்கு}$$

$f'(0) = 0$, ஆதலால் $2p - q(-3) = 0$. (5)

$\therefore\ 2p = -3q$

$= -6$

$\therefore\ p = -3$ (5)

25

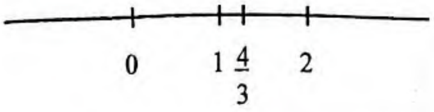
$$f'(x) = \frac{-3(x^2-3x+2) - (-3x+2)(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad (5)$$

$$= \frac{-3x^2+9x-6+6x^2-13x+6}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x^2-4x}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad (5) \quad x \neq 1, 2, \text{ இற்கு}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ அல்லது $x = \dfrac{4}{3}$. (5)



	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < 2$	$2 < x < \infty$	
$f'(x) = \dfrac{x(3x-4)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ இன்குறி	$\frac{(-)(-)}{(+)}$ $= (+)$ ⑤	$\frac{(+)(-)}{(+)}$ $= (-)$ ⑤	$\frac{(+)(-)}{(+)}$ $= (-)$ ⑤	$\frac{(+)(+)}{(+)}$ $= (+)$ ⑤	$\frac{(+)(+)}{(+)}$ $= (+)$ ⑤	
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	↗	⑩

$(-\infty, 0]$, $[\frac{4}{3}, 2)$, $(2, \infty)$ இல் அதிகரிக்கும்

$(0, 1]$ and $[1, \frac{4}{3})$ இல் குறையும்

50

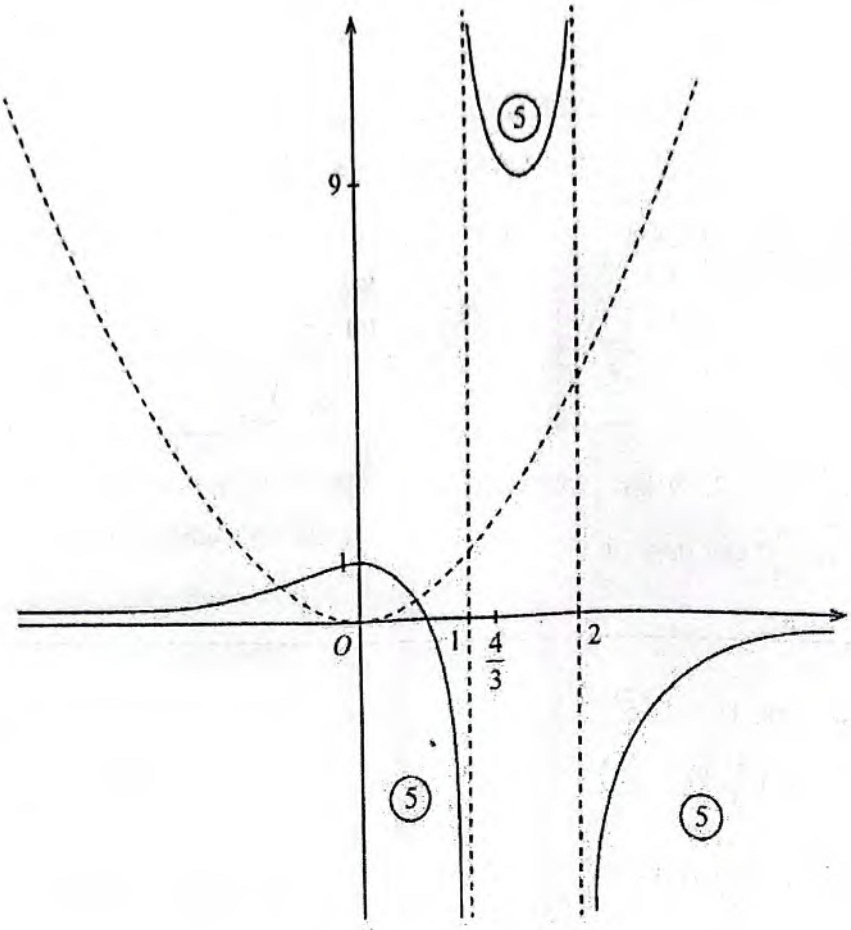
ஓரிட உயர்வு $(0, 1)$ ⑤

ஓரிட இழிவு $(\frac{4}{3}, 9)$ ⑤

$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = \infty$ ⑤

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 2+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. ⑤



35

$x^2(x-1)(x-2) = 2 - 3x$

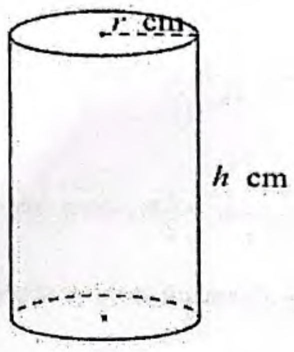
$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2-3x}{(x-1)(x-2)}$ (5)

$\Leftrightarrow x^2 = f(x)$

$\therefore$ மெய்த் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை = 2. (5)

10

(b)



$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$\pi r^2 h = 1024\pi$$

$$\therefore \quad h = \frac{1024}{r^2} \quad (5)$$

$$\therefore \quad S = 2\pi r \cdot \frac{1024}{r^2} + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi\left(\frac{1024}{r} + r^2\right) \quad (5)$$

[10]

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left(-\frac{1024}{r^2} + 2r\right) \quad (5)$$

$$\frac{dS}{dr} = 0 \quad (5) \quad \Leftrightarrow \frac{1024}{r^2} = 2r$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 512$$

$$\Leftrightarrow r = 8. \quad (5)$$

$\frac{dS}{dr} < 0$ for $0 < r < 8$.

$\frac{dS}{dr} > 0$ for $r > 8$.

$\therefore$ $r = 8$ ஆகும்போது S இழிவாகும். (5)

[20]

15.(a) எல்லா $t \in \mathbb{R}$ இற்கும் $3t^2 + 4 = A(t^2 - 2t + 4) + Bt(t + 1)$ ஆகுமாறு A, B ஆகிய மெய்ம் மாறிலி பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\int \frac{3t^2 + 4}{(t+1)(t^2 - 2t + 4)} dt$ ஐக் காண்க.

(b) பிரதியீடு $u = x + \sqrt{x^2 + 3}$ ஐப் பயன்படுத்தி, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} dx = \frac{1}{2} \ln 3$ எனக் காட்டுக.

$J = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3}\, dx$ எனக் கொள்வோம். பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி,

$2J = 2 + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}} dx$ எனக் காட்டுக.

$J = 1 + \frac{3}{4} \ln 3$ என உய்த்தறிக.

(c) a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a - x) dx$ ஐப் பயன்படுத்தி,

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right) dx = \frac{\pi}{8} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

(a) $3t^2 + 4 = A(t^2 - 2t + 4) + Bt(t + 1)$

$= (A + B)t^2 + (-2A + B)t + 4A$ (5)

t^2 இன் குணகங்கள்: $3 = A + B$

t^1 இன் குணகங்கள்: $0 = -2A + B$

t^0 இன் குணகங்கள்: $4 = 4A$

$\therefore\ A = 1,\ \ B = 2.$

(5) (5)

15

$\therefore$

$$\therefore \quad \frac{3t^2+4}{(t+1)(t^2-2t+4)} = \frac{1}{t+1} + \frac{2t}{t^2-2t+4}. \quad (10)$$

$$\int \frac{3t^2+4}{(t+1)(t^2-2t+4)}\,dt = \int \left\{ \frac{1}{t+1} + \frac{2t-2+2}{t^2-2t+4} \right\} dt$$

$$= \int \frac{1}{t+1}\,dt + \int \frac{2t-2}{t^2-2t+4}\,dt + 2\int \frac{1}{(t-1)^2+3}\,dt$$

$$= \ln|t+1| + \ln|t^2-2t+4| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t-1}{\sqrt{3}}\right) + C, \quad (5)$$

(5) (5) (5)

இங்கு C ஒரு எதேச்சையான மாறிலி.

30

(b) $u = x + \sqrt{x^2+3}$.

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{u}{\sqrt{x^2+3}} \quad (5)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{u}\,du$$

$x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{3}$.

$x = 1 \Rightarrow u = 3$. (5)

ஆகவே $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{u}\,du = \ln|u|\Big|_{\sqrt{3}}^{3} = \ln 3 - \ln\sqrt{3}$

(5) (5)

$$= \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3. \quad (5)$$

25

$$J = \int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx = x\sqrt{x^2+3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}\,dx \quad (10)$$

$$= 2 - \int_0^1 \frac{x^2+3-3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx \quad (5)$$

$$\therefore\ J = 2 - \int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx \quad (10)$$

$$\Rightarrow 2J = 2 + \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\,dx. \quad (5)$$

30

$$\therefore\ J = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln 3$$

$$= 1 + \frac{3}{4}\ln 3 \quad (10)$$

10

(c) $\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right)dx$ ஏனின்

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right)dx \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x}\right)dx \quad (10)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x + \sin x}{2\cos x}\right)dx \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{1}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\right)dx \quad (10)$$

$$\therefore\ = I = \ln\left(\frac{1}{2}\right)x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I. \quad (5)$$

$$\Rightarrow 2I = \ln\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right). \quad (5)$$

4

---

16. $A \equiv (1, 2)$ எனவும் $B \equiv (a, b)$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$ ஆகும். கோட்டுத் துண்டம் AB இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி l இன் சமன்பாடு $x + y - 4 = 0$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$C \equiv (3, 1)$ எனக் கொள்வோம். புள்ளி C ஆனது கோடு l மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டி, $A\hat{C}B$ ஐக் காண்க.

A, B, C ஆகிய புள்ளிகளினூடாக உள்ள வட்டம் S எனக் கொள்வோம். S இன் மையம் $\left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டி, S இன் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

இதிலிருந்து, A, B ஆகிய புள்ளிகளினூடாகவும் புள்ளி $D \equiv (0, 3)$ இனூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

AB இன் நடுப்புள்ளி

$$\equiv \left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right). \quad (5)$$

இப்புள்ளி l இல் கிடக்கும்.

$$\therefore \ \frac{1+a}{2} + \frac{2+b}{2} - 4 = 0$$

$\therefore \ a + b = 5$ ——— ① (5)

அத்துடன், l ஆனது AB க்கு செங்குத்தானது.

$$\therefore \ \left(\frac{b-2}{a-1}\right) \times (-1) = -1. \quad (5) \quad (5)$$

$\therefore \ b - 2 = a - 1$

$\therefore \ b - a = 1$ ——— ② (5)

① , ② இலிருந்து $a = 2, \ b = 3.$ (5) (5)

ஆகவே, $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (2, 3)$ and $C \equiv (3, 1)$.

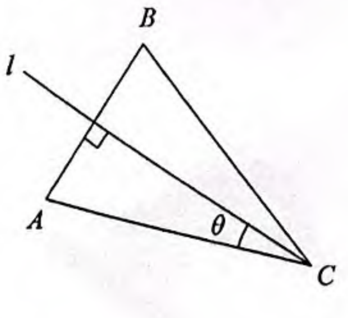
35

$x = 3, \ y = 1$ இனை $x + y - 4 = 0$ இல் பிரதியிட (5)

இ.கை.ப. $= 3 + 4 - 1$

$= 0 =$ வ.கை.ப.

$\therefore$ C ஆனது l இல் கிடக்கும் (5)



$AC,\ l$ இற்கு இடையிலான கோணம் θ

எனின் θ கூர்ங்கோணம் ஆகும்.

AC இன் சாய்வு = $-\frac{1}{2}$ (5)

$$\tan\theta = \left|\frac{-\frac{1}{2}-(-1)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1)}\right| = \frac{1}{3}$$ (10)

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right).$ (5)

$\therefore\ A\hat{C}B = 2\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right).$ (5)

35

AC இன் செங்குத்து இருகூறாக்கி m என்க..

m இன் சாய்வு= 2. (5)

AC இன் நடுப்புள்ளி $\equiv \left(2, \frac{3}{2}\right).$ (5)

m இன் சமன்பாடு : $y-\frac{3}{2} = 2(x-2)$ (5)

$$y - 2x + \frac{5}{2} = 0.$$

S இன் மையமானது $l,\ m$ இன் இடைவெட்டுப்புள்ளியாகும். (5)

இனைத்தீர்க்க

$x+y-4=0, \quad y-2x+\frac{5}{2}=0$; (5)

$3x = 4+\frac{5}{2}.$

$\therefore\ x = \frac{16}{3}, \quad y = 4-\frac{13}{6} = \frac{11}{6}.$

(5) (5)

$\therefore\ S$ இன் மையம் $\equiv \left(\frac{13}{6}, \frac{11}{6}\right)$

S இன் ஆரை $= \sqrt{\left(\frac{13}{6}-1\right)^2+\left(\frac{11}{6}-2\right)^2}$ (10)

$= \sqrt{\frac{49}{36}+\frac{1}{36}}$

$\sqrt{\frac{25}{18}}$. (5)

S இன் சமன்பாடு $\left(x-\frac{13}{6}\right)^2+\left(y-\frac{11}{6}\right)^2=\frac{25}{18}$. (10)

$x^2+y^2-\frac{13}{3}x-\frac{11}{3}y+\frac{20}{3}=0$

[60]

$\therefore$ AB இன் சமன்பாடு : $y-2=1(x-1)$ (5)

$x-y+1=0$

A, B இனூடாகச்செல்லும் யாதாயினும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு

$\left(x-\frac{13}{6}\right)^2+\left(y-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{25}{18}+\lambda(x-y+1)=0$ இனால்தரப்படும். இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$. (10)

இது $D\equiv(0,3)$ இனூடாக செல்வதற்கு ஆதல் வேண்டும் $\left(\frac{13}{6}\right)^2+\left(\frac{7}{6}\right)^2-\frac{25}{18}+\lambda(-2)=0$

$\lambda=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$. (5)

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு $x^2+y^2-2x-6y+9=0$.

[20]

---

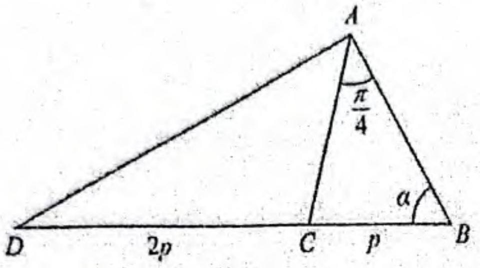
17. (a) $6\cos 2x - 8\sin 2x$ ஐ வடிவம் $R\cos(2x+\alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $R > 0$ உம் $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

இதிலிருந்து, $6\cos 2x - 8\sin 2x = 5$ ஐத் தீர்க்க.

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$ ஐ வடிவம் $a\cos 2x + b\sin 2x + c$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $a, b, c\ (\in \mathbb{R})$ ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகளாகும்.

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$ இன் குறைந்தபட்சப் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(b)



உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் $BC = p$, $B\hat{A}C = \frac{\pi}{4}$, $A\hat{B}C = \alpha$ ஆகும். நீட்டப்பட்ட கோடு BC மீது புள்ளி D ஆனது, $CD = 2p$ ஆகுமாறு, உள்ளது.

$AB = p(\cos\alpha + \sin\alpha)$ எனக் காட்டுக.

AD^2 ஐ p, α ஆகியவற்றிற் காண்க.

$AD = 3p$ எனின், $\alpha = \tan^{-1}(5)$ என உய்த்தறிக.

(c) சமன்பாடு $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ஐத் தீர்க்க.

(a) $6\cos 2x - 8\sin 2x$ $\qquad \sqrt{6^2+8^2} = 10$

$= 10\left(\frac{6}{10}\cos 2x - \frac{8}{10}\sin 2x\right)$ (5)

$= 10\left(\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{4}{5}\sin 2x\right)$

$= 10(\cos\alpha\cos 2x - \sin\alpha\sin 2x)$, where $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ is such that $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ and $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. (5)
(5)

$= 10\cos(2x+\alpha)$. (5)

$\therefore\ R = 10$ and $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$. (5)

25

$6\cos 2x - 8\sin 2x = 5$

$10\cos(2x+\alpha) = 5$ (5)

$\therefore\ \cos(2x+\alpha) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ (5)

$2x+\alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, இங்கு $n \in \mathbb{Z}$. (5)

$\therefore\ x = n\pi - \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}$, இங்கு $n \in \mathbb{Z}$. (5)

20

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$

$= 24\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right) - 32\times\frac{1}{2}\sin 2x$ (10)

$= 12\cos 2x - 16\sin 2x + 12$

$\therefore\ a = 12,\quad b = -16,\ c = 12.$ (5)

15

$24\cos^2 x - 32\sin x\cos x$

$= 12\cos 2x - 16\sin 2x + 12$

$= 2(6\cos 2x - 8\sin 2x) + 12$

$= \underbrace{20\cos(2x+\alpha)}_{\text{இழிவு } = -1} + 12$ (5)

$\therefore$ வேண்டிய இழிவு $= -20 + 12$
$= -8.$ (5)

10

(a) $\triangle ABC$ க்கு சைன்விதி :

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{p}{\sin\frac{\pi}{4}}$$ (10)

$$\therefore\ AB=\sqrt{2}p\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)$$ (5)

$$=\sqrt{2}p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$$

$$=p(\cos\alpha+\sin\alpha).$$ (5)

[20]

$\triangle ABD$ க்கு கோசைன்விதி :

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\alpha$$ (5)

$$=p^2(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+9p^2-2p(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot 3p\cos\alpha$$ (5)

$AD=3p$ எனக் கருதுவதால்

$$9p^2=p^2(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+9p^2-6p^2(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot\cos\alpha$$ (5)

$$\therefore\ (\cos\alpha+\sin\alpha)^2-6(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

$$\Rightarrow\ \cos\alpha+\sin\alpha=6\cos\alpha$$ (5) $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

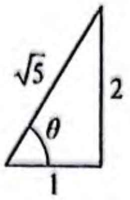
$$\Rightarrow\ \sin\alpha=5\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\ \tan\alpha=5$$

$$\Rightarrow\ \alpha=\tan^{-1}(5).$$ (5)

[25]

(b) $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \tan^{-1}(2)$. (5)



$\alpha = \tan^{-1}(x+1),\ \beta = \tan^{-1}(x-1)$ என்க.

$\alpha + \beta = \tan^{-1}(2)$ (5)

$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 2$ (5)

$\Rightarrow \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = 2$ (5)

$\Rightarrow \dfrac{x+1+x-1}{1-(x^2-1)} = 2$ (5) $\Rightarrow x = 2 - x^2$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x-1)\ (x+2) = 0$

$x = 1$ or $x = -2$. (5)

$x = -2$ ஒரு தீர்வல்ல. $x = 1$ ஒரு தீர்வு.

$\therefore\ x = 1.$ (5)

35